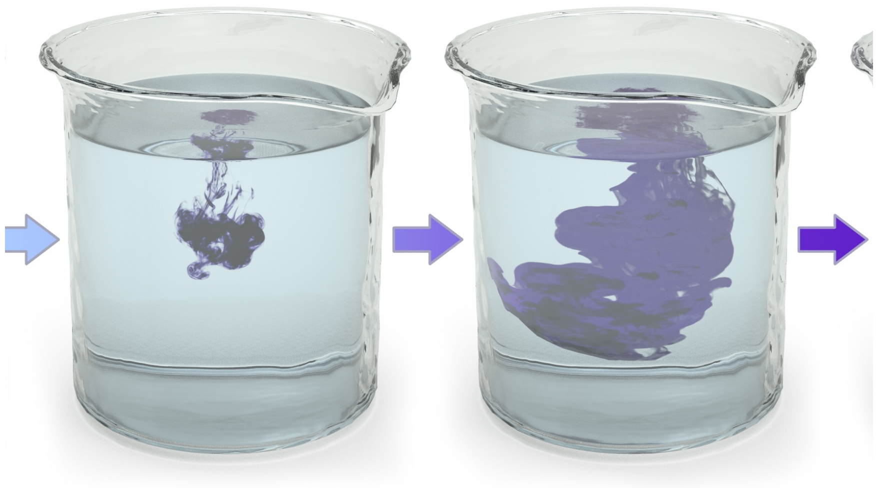
Cours 13

- Exemples et applications.
  - ✧ Transport
    - ➢ Diffusion.
    - ➢ Conduction thermique



Les objectifs du cours 13

1 Exemples d'applications. Décrire des phénomènes de transports observés dans la vie quotidienne.

- Remarques générales
- Diffusion de particules
- Conduction de la chaleur

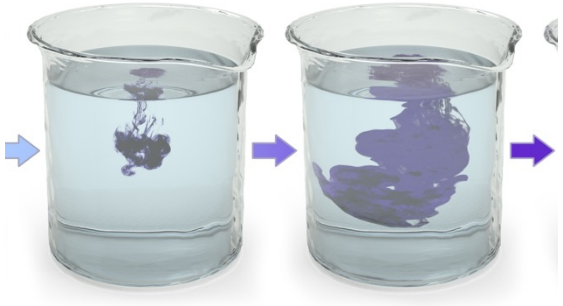
Expérience quotidienne :

Phénomène

- Transport thermique
- Conduction électrique
- Diffusion
- Viscosité
- …

Quantité transportée

- Chaleur, Q
- Charge électrique, q
- Molécules, n
- Quantité de mouvement, p
- …



De manière générale :

Transfert d'un point vers un autre au cours du temps d'une grandeur *extensive* ξ.

Causes du transport :

Système *hors équilibre* thermodynamique.

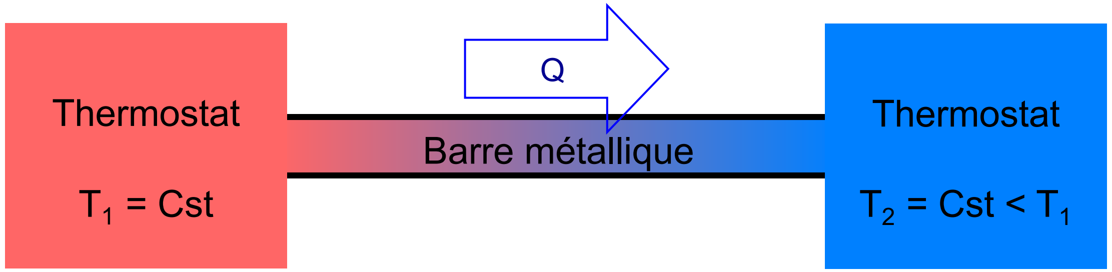
- Si le système est à l'équilibre thermodynamique :
  - Les variables d'état ne dépendent pas du temps. $\frac{d}{dt}\{\text{variables d'état}\} = 0$
  - Il n'y a aucun échange (matière ou énergie) avec l'extérieur.

$\Rightarrow$ Rien ne bouge, il n'y a pas de transfert.

- Si le système est seulement stationnaire :

$$\frac{d}{dt}\{\text{variables d'état}\} = 0$$

Mais il y a des échanges d'énergie ou de matière avec l'extérieur.



Mécanismes de transport

Causes du transport :

Système *hors équilibre* thermodynamique*.

Phénomène

- Transport thermique
- Conduction électrique
- Diffusion
- Viscosité
- …
- *Transfert* d'un point vers un autre

Non-uniformité associée

- Température $T_1 \neq T_2$
- Potentiel $V_1 \neq V_2$
- Densité $\rho_1 \neq \rho_2$
- Vitesse $v_1 \neq v_2$
- …
- Grandeur *intensive* Y

De manière générale :

Il y a une *non-uniformité* d'une grandeur *intensive.*

* Ces phénomènes sont donc par nature des phénomènes *irréversibles*, d'autant plus irréversibles que les non-uniformités sont grandes.

Causes du transport :

Système *hors équilibre* thermodynamique.

De manière générale :

Il y a une *non-uniformité* d'une grandeur *intensive* Y**.

- On quantifie cette inhomogénéité par le *gradient* : $\frac{dY(x)}{dx}$ Exemples : $\frac{dT(x)}{dx}$; $\frac{d\rho(x)}{dx}$; $\frac{dV(x)}{dx}$

Transfert thermique, diffusion, courant électrique

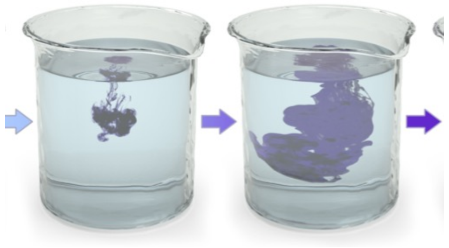
** A y regarder de plus près, ce n'est pas complètement satisfaisant (exemple équilibre thermodynamique de l'atmosphère terrestre). C'est ce qui conduira à la notion de potentiel thermodynamique (cf. cours de Chimie, Matériaux, etc.).

Différents modes de transfert :

- A un niveau microscopique, la grandeur transportée est liée aux atomes ou aux molécules : nombre n, masse m, quantité de mouvement p, énergie cinétique E_c, …

- Le transfert s'effectue par l'intermédiaire du mouvement et des chocs à l'échelle microscopique des atomes / molécules.

  - Si il y a un déplacement macroscopique de matière, on parle de *diffusion*.



  - Si il n'y a pas de déplacement macroscopique de matière, on parle de *conduction*.

Mécanismes de transport

Causes du transport :

Système *hors équilibre* thermodynamique.

De manière générale :

Transfert d'un point vers un autre au cours du temps d'une grandeur *extensive.*

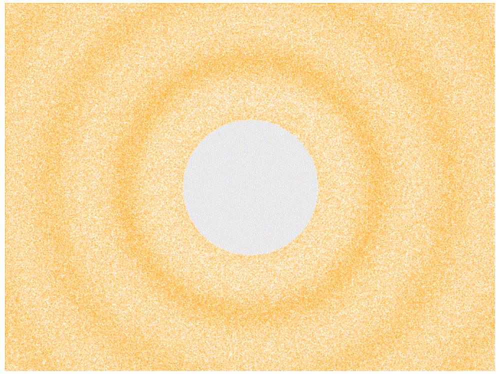
Phénomène	**Quantité transportée**	**Non-uniformité associée**
•Transport thermique	•Chaleur, Q	•Température $T_1 \neq T_2$
•Conduction électrique	•Charge électrique, q	•Potentiel $V_1 \neq V_2$
•Diffusion	•Molécules, n	•Densité $\rho_1 \neq \rho_2$
•Viscosité	•Quantité de mouvement, p	•Vitesse $v_1 \neq v_2$
•…	•…	•…
•*Transfert dans l'espace*	•Grandeur *extensive* ξ	•Grandeur *intensive* Y

Remarque :

- Transport d'une variable intensive, on parle alors de *propagation* et d'*onde*.

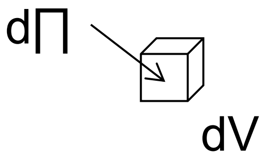
Exemples :

- Pression → Son
- Potentiel, champ électrique, champ magnétique → Onde radio, lumière
- Tension de surface → Vagues



Mécanismes de transport

Vecteur densité de courant



- Soit la quantité π qui est transportée, on définit la **densité** de π, ρ_π :

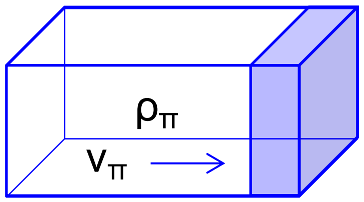
$$\boxed{\rho_\Pi = \frac{d\Pi}{dV}}$$

  - Charge électrique $\rho_q = \dfrac{dq}{dV}$
  - Nombre de particules $\rho_n = \dfrac{dn}{dV}$
  - Masse volumique $\rho_m = \dfrac{dm}{dV}$
  - Energie interne $\rho_U = \dfrac{dU}{dV}$
  - …

- La quantité π est transportée à la vitesse v_π.
  - Par exemple si c'est un transport par diffusion $v_\pi = \langle v_{particules} \rangle$, aussi appelée *vitesse de dérive*.

Ne pas confondre vitesse de dérive et vitesse des atomes dans le gaz qui est *beaucoup* plus grande.

Vecteur densité de courant



- La quantité $d\prod$ qui traverse la surface S pendant un temps dt est celle qui est contenue dans la tranche d'épaisseur $dx = v_\pi dt$.

$$d\prod = \rho_\Pi S dx = \rho_\Pi S v_\Pi dt$$

- L'**intensité** qui traverse la surface S par unité de temps est : $\frac{d\prod}{dt} = S\rho_\Pi v_\Pi$

- L'intensité $d\prod/dt$ est le **flux** à travers S de la quantité : $\boxed{\overrightarrow{J_\Pi} = \rho_\Pi \overrightarrow{v_\Pi} \qquad \frac{d\prod}{dt} = SJ_\Pi}$

- Sous une forme vectorielle : L'intensité est le *flux* à travers l'élément de surface orienté $\vec{S} = S\vec{u}_x$ de $\overrightarrow{J_\Pi} = \rho_\Pi v_\Pi \vec{u}_x = \rho_\Pi \overrightarrow{v_\Pi}$

$$\boxed{\frac{d\prod}{dt} = \overrightarrow{J_\Pi} \cdot \vec{S}}$$

- On appelle J_π le vecteur **densité de courant** de la propriété π.
  - Densité de courant électrique $\overrightarrow{J_q} = \rho_q \overrightarrow{v_q}$
  - Densité de courant de particules $\overrightarrow{J_n} = \rho_n \overrightarrow{v_n}$
  - Densité de courant d'énergie interne $\overrightarrow{J_U} = \rho_U \overrightarrow{v_U}$

Equation de continuité

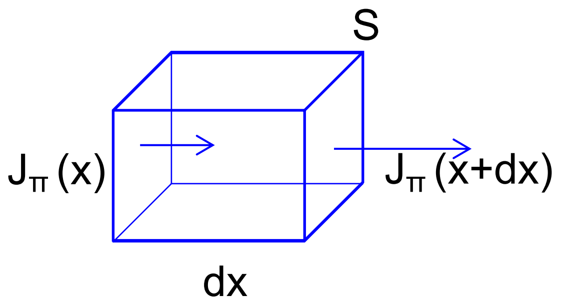
- Bilan de la quantité π (par exemple le nombre de particules) durant le temps dt contenue dans un volume Sdx.
  - La variation dπ de π est la somme de ce qui est
    - entré/sorti en x et en x+dx
    - ce qui a été créé/détruit (par exemple espèces chimiques créées ou détruites si il y a une réaction chimique).
  - On note σ_π, la quantité de π créée(+)/détruite(-) par unité de temps et de volume.

$$\sigma_\Pi = \frac{\delta\Pi_c}{dtdV}$$

$$d\Pi = \delta\Pi_{e/s} + \delta\Pi_c$$

$$d\Pi = SJ_\Pi(x)dt - SJ_\Pi(x+dx)dt + \sigma_\Pi Sdtdx$$

$$d\rho_\Pi(x,t)Sdx = \frac{\partial\rho_\Pi(x,t)}{\partial t}dtSdx = -S\frac{\partial J_\Pi(x,t)}{\partial x}dxdt + \sigma_\Pi(x,t)Sdtdx$$



$$\boxed{\frac{\partial\rho_\Pi}{\partial t} + \frac{\partial J_\Pi}{\partial x} = \sigma_\Pi}$$

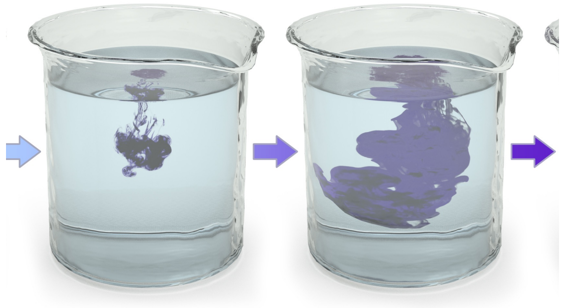
Equation de continuité

Les objectifs du cours 13

1 Exemples d'applications. Décrire des phénomènes de transports observés dans la vie quotidienne.

- Remarques générales
- Diffusion de particules
- Conduction de la chaleur

Diffusion



Adolf Fick
1829 - 1901

Loi de Fick

- La loi de Fick est une loi phénoménologique* qui établit une relation de proportionnalité entre le vecteur densité de courant et le gradient de concentration :

$$\boxed{J_n(x,t) = -D\frac{\partial \rho_n(x,t)}{\partial x}}$$

Le coefficient D s'appelle *coefficient de diffusion*.

Corps	D (m^2s^{-1})
Sucre dans l'eau	0,52 10^{-9}
Sel dans l'eau	1,9 10^{-9}
Vapeur d'eau dans l'air	22 10^{-6}

* Une démonstration sera faite par A. Einstein en 1905

Equation de la diffusion (seconde loi de Fick)

- **A une dimension :**

Equation de continuité
$$\frac{\partial \rho_n(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial J_n(x,t)}{\partial x} = \sigma_n(x,t)$$

Loi de Fick
$$J_n(x,t) = -D\frac{\partial \rho_n(x,t)}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho_n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(-D\frac{\partial \rho_n}{\partial x}\right) = \sigma_n$$

$$\boxed{\frac{\partial \rho_n}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \rho_n}{\partial x^2} + \sigma_n}$$ **Equation de la diffusion**

Equation de la diffusion

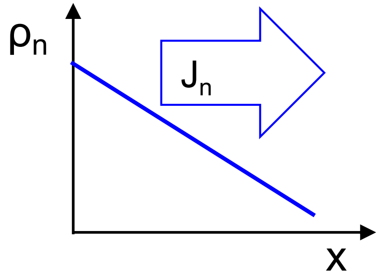
La résolution de l'équation de la diffusion est souvent très complexe. Etude de quelques cas particuliers simples à une dimension et sans terme source ($\sigma_n = 0$).

- Vecteur densité de courant de diffusion constant ⇔ variation linéaire de la concentration avec x.

$$D\frac{d^2\rho_n}{dx^2} = 0$$

$$J_n = -D\frac{d\rho_n}{dx}$$

Dont la solution est : $\boxed{\rho_n(x) = -\frac{J_n}{D}x + \rho_n(0)}$



- Analyse dimensionnelle :

D : coefficient de diffusion ∝ $[L]^2[T]^{-1}$
τ : temps de la diffusion ∝ [T]
L : longueur caractéristique du problème ∝ [L]

$$\boxed{L \propto \sqrt{D\tau}}$$

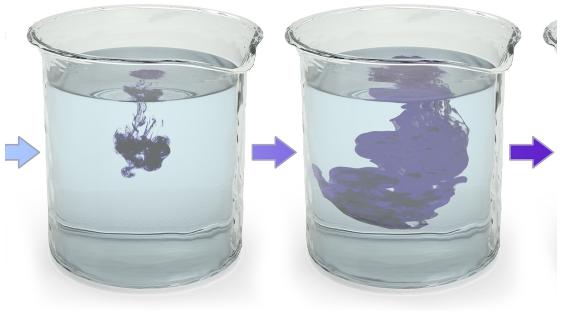
Equation de la diffusion

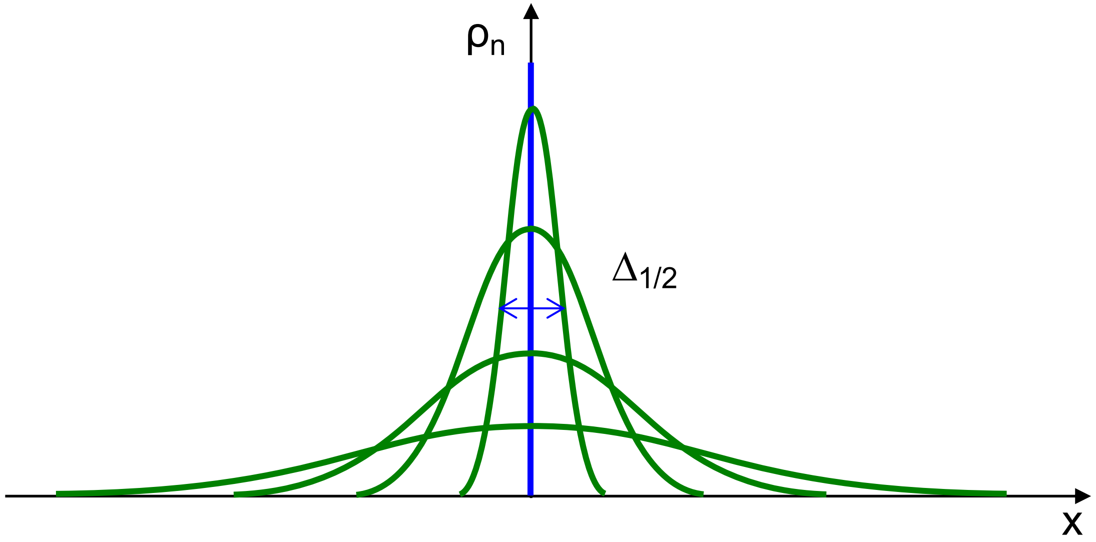
- Diffusion *à une dimension* avec n_s particules sur un plan en x = 0 à t = 0.

$$\frac{d\rho_n(x,t)}{dt} = D\frac{d^2\rho_n(x,t)}{dx^2}$$ a pour solution (le vérifier) : $$\boxed{\rho_n(x,t) = \frac{n_s}{\sqrt{4\pi Dt}}e^{-\frac{x^2}{4Dt}}}$$

C'est une courbe Gaussienne dont la largeur à mi-hauteur $\Delta_{1/2}$ (le vérifier à la maison) évolue en $t^{1/2}$.

$$\boxed{\Delta_{1/2} = 4\sqrt{Ln2}\sqrt{Dt}}$$





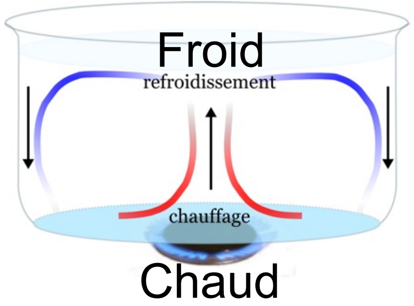
Les objectifs du cours 13

1 Exemples d'applications. Décrire des phénomènes de transports observés dans la vie quotidienne.

- Remarques générales
- Diffusion de particules
- Conduction de la chaleur

Expérience quotidienne : La chaleur peut se propager de différentes manières.

- Transfert de chaleur sans déplacement macroscopique de matière. Dans un solide, il n'y a pas de déplacement macroscopique des atomes, la chaleur se propage car l'agitation thermique des atomes se transfère entre atomes voisins : *Conduction thermique*.

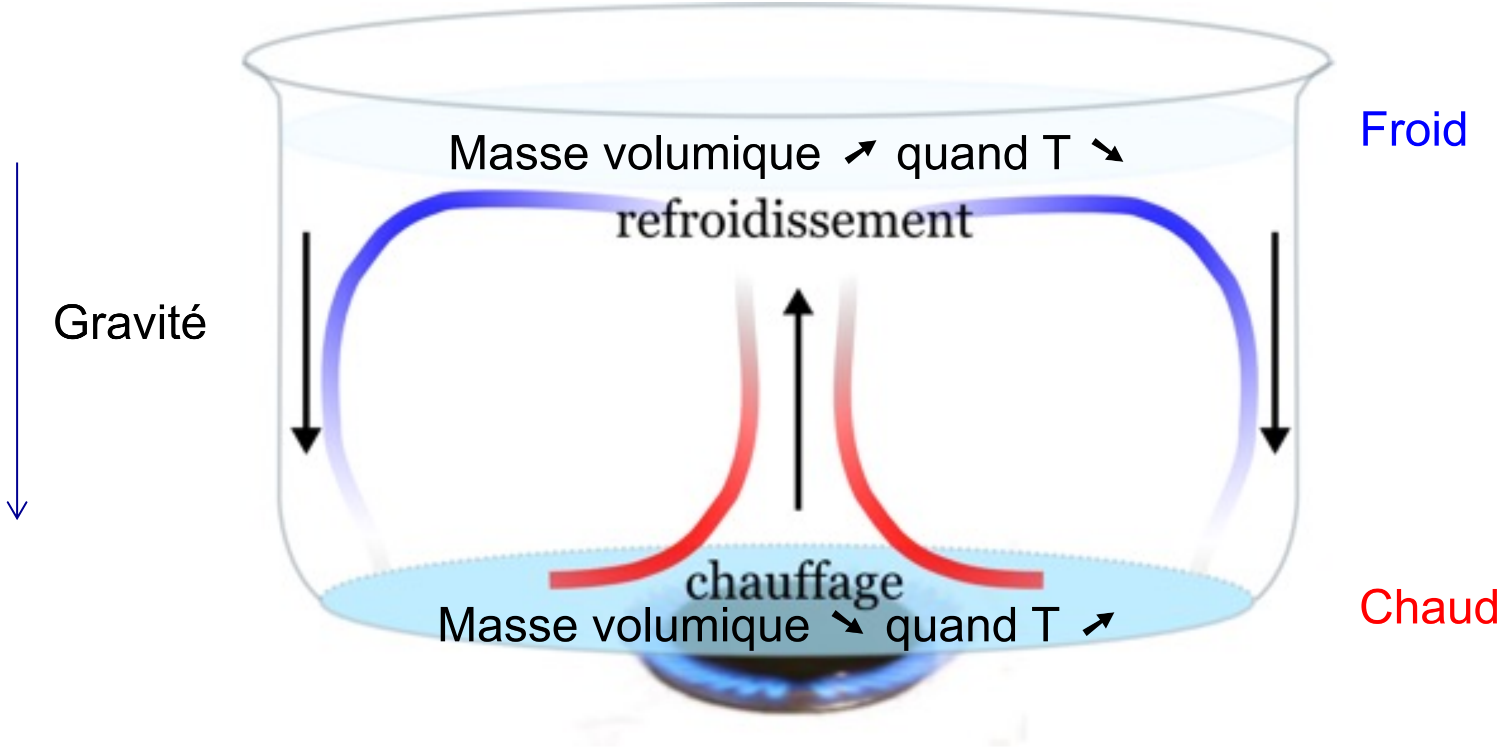


- Le transfert de chaleur peut être accompagné de transfert macroscopique de matière chaude/froide : *Convection*.
  - Atmosphère
  - Thermosiphon, chauffage central
  - Géologie, tectonique terrestre

- La chaleur peut également se propager dans le vide sous la forme de rayonnement électromagnétique (c.à.d. de la lumière).
  - Soleil
  - *Rayonnement du corps noir*

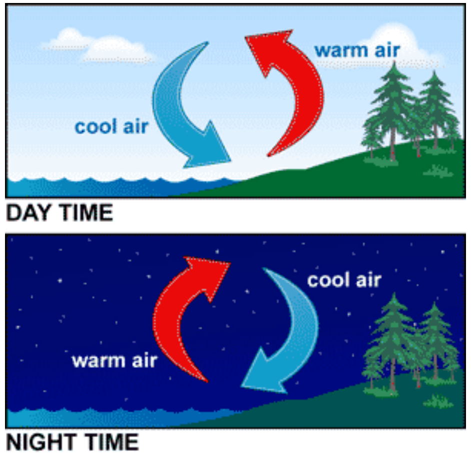
Convection thermique

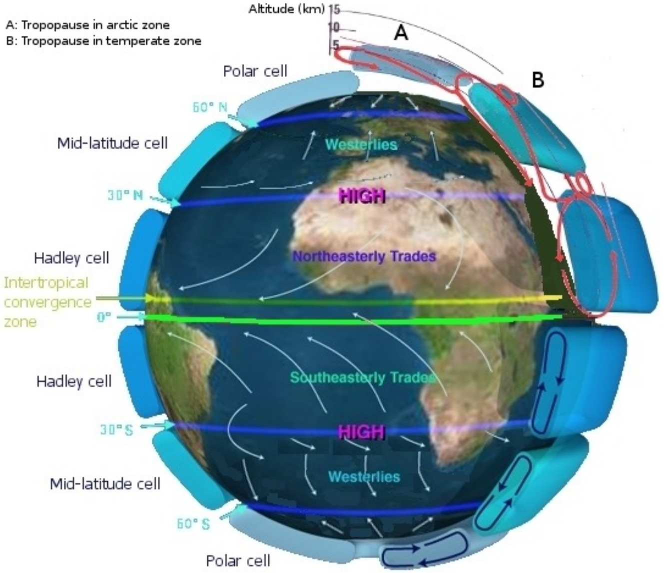
Expérience quotidienne : Convection.

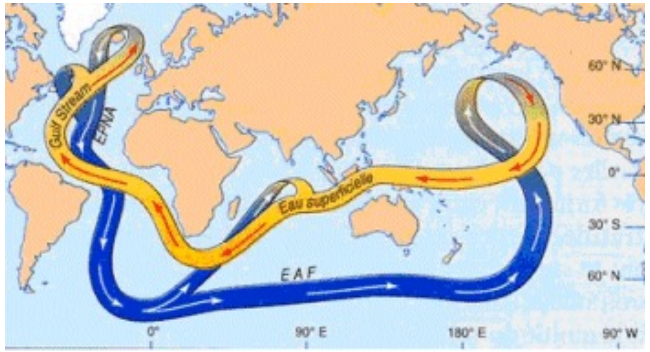


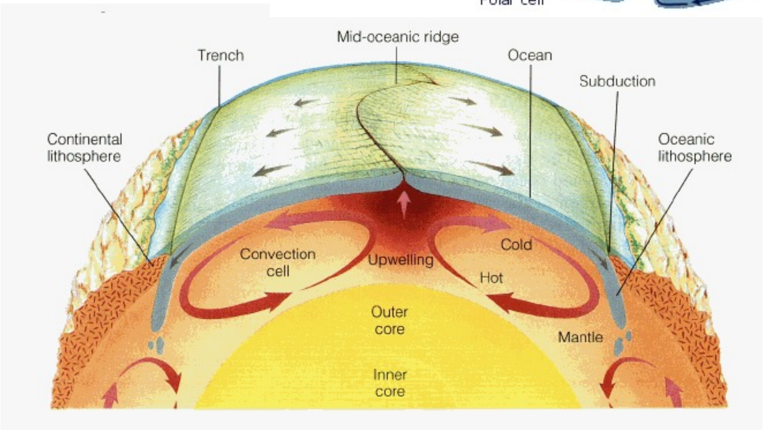
Expérience quotidienne : La chaleur peut se propager de différentes manières.

La convection est un mode d'échange de chaleur très efficace et très répandu dans la vie quotidienne.



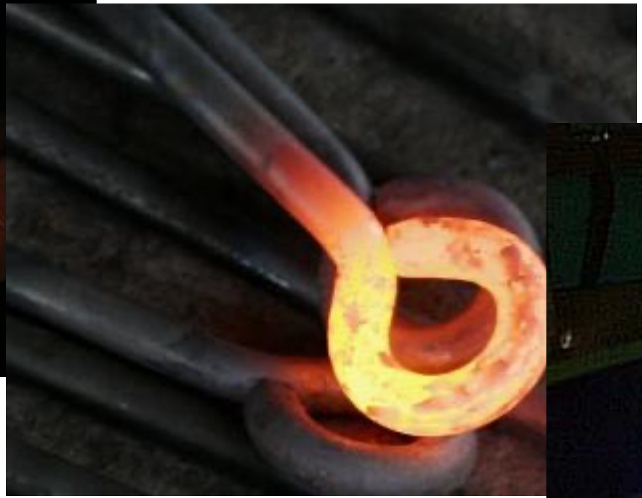


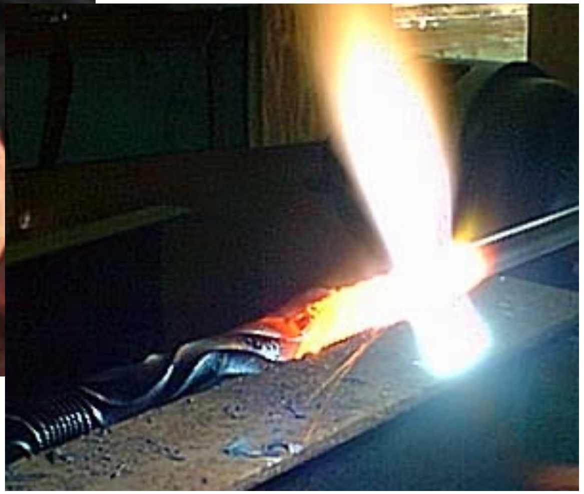




Rayonnement thermique

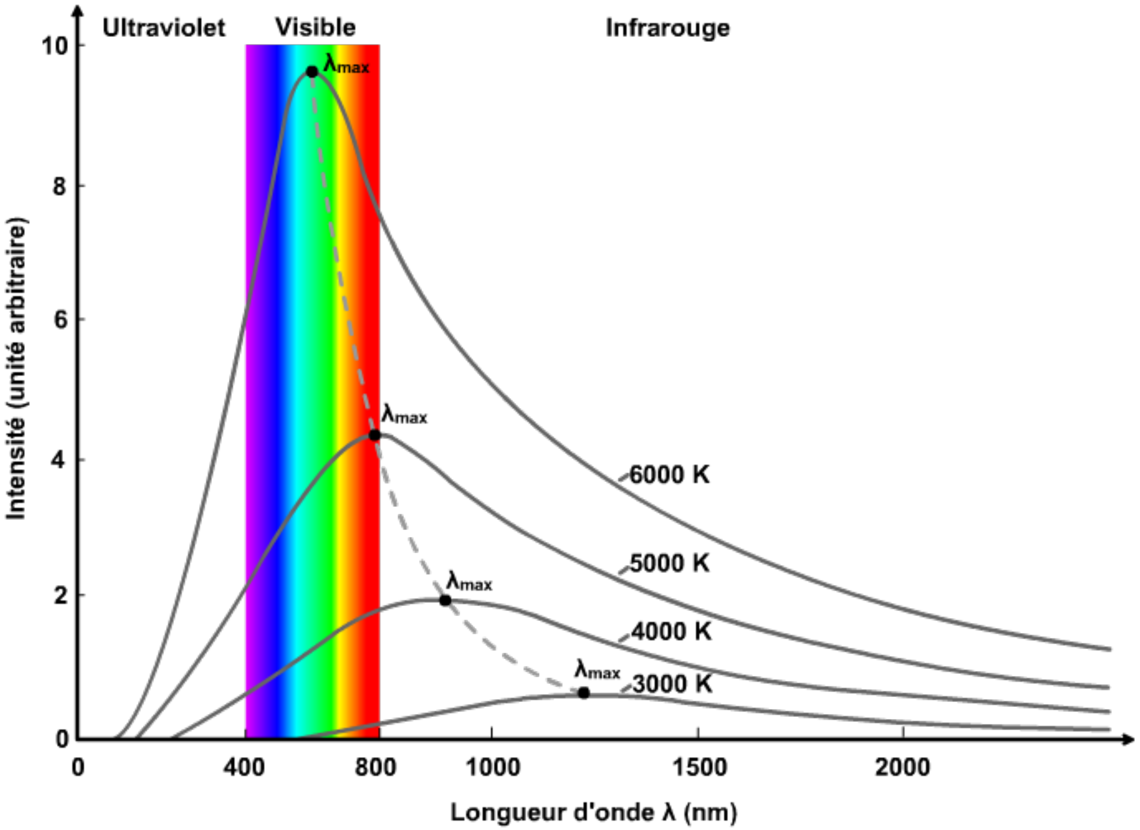
- La chaleur peut également se propager dans le vide sous la forme de rayonnement électromagnétique (c.à.d. de la lumière).
    - Soleil
    - *Rayonnement du corps noir*





- Un corps chaud émet de la lumière …
    - ... et quand il est très chaud il émet de la lumière visible blanche.

Rayonnement thermique



- L'expérience montre que tous ces objets ont des comportements physiques similaires

  ○ **Puissance** émise en fonction de la **température :**
  Loi de Stefan : $P_{émis} \propto S_{émettrice} \times T^4$; $P = \sigma S T^4$; $\sigma = 5{,}67\ 10^{-8}\ Wm^{-2}K^{-4}$, constante de Stefan)

  ○ **Spectre** de la lumière émise en fonction de la **température (Loi de Wien : $T \times \lambda_{max} = Cst$)**

Les équations et la méthode pour décrire les *transferts thermiques* sont très semblables à l'*analyse de la diffusion*. Quand ils seront identiques on ne détaillera pas les calculs.

Courant thermique

- Il est plus prudent de définir un flux d'une grandeur conservative, comme l'énergie interne dU, plutôt que un flux de chaleur δQ qui n'est pas une quantité conservative.
- Dans tout ce chapitre on se placera dans le cas de flux d'énergie interne *isochore*, c'est à dire sans travail, δW = 0, et pour lequel on peut écrire dU = δQ.*

Vecteur densité de courant thermique sans travail (énergie interne isochore)

$\boxed{\vec{J}_U}$ Note : on précisera l'écriture de J_U plus loin

* En toute rigueur ces équations seront donc applicables à des milieux indéformables et pas à des milieux compressibles comme des gaz.

Equation de continuité

ρ : masse volumique

u : densité massique d'énergie interne

ρu : densité volumique d'énergie interne

σ_U : création volumique d'énergie interne (en cas de réaction chimique par exemple).

$$\boxed{\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial J_U}{\partial x} = \sigma_U}$$

Loi de Fourier

- Formellement comparable à la loi de Fick c'est une loi phénoménologique qui établit une relation de proportionnalité entre le vecteur densité de courant thermique et le gradient de température :
- Le signe - signifie que la chaleur va spontanément du chaud vers le froid

$$\boxed{J_U(x,t) = -\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x}}$$

Le coefficient λ s'appelle *la conductivité thermique*.

Corps	λ ($Wm^{-1}K^{-1}$)
Cuivre	418
Verre	1,2
Air	24 10^{-3}
Ciment	0,8
Acier	16 - 24
Bois sec	0,04 - 0,17

Conduction de la chaleur

Loi de Fourier $$J_U(x,t) = -\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x}$$

Equation de continuité $$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial J_U}{\partial x} = \sigma_U$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad \frac{\partial \rho u}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \sigma_U}$$

- Comme on considère des transformations sans travail (isochore) on a :

$$dU(T,V) = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV = C_v dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV = C_v dT$$

- Et donc : $$d\left(\frac{U}{V}\right) = \frac{C_v}{V} dT \quad \Rightarrow d\rho u = \rho c_v dT \quad \Rightarrow \frac{\partial \rho u}{\partial t} = \rho c_v \frac{dT}{\partial t}$$

Note : u est la densité *massique* d'énergie interne
c_v est la capacité calorifique *massique* à *volume* constant
Pour des solides $c_v \approx c_p$.

Conduction de la chaleur

Equation de conduction de la chaleur

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c_v}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\sigma_U}{\rho c_v}}$$

Equation de conduction isochore de la chaleur

Le coefficient $\lambda/\rho c_v$ souvent noté a s'appelle la *diffusivité thermique*.

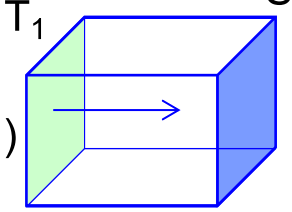
Corps	a (10^{-6} m^2s^{-1})
Cuivre	114
Inox	4
Verre	0,58
Bois	0,45
Eau	0,14

Jean-Baptiste Joseph Fourier
1768 - 1830

Note : c'est en développant des outils mathématiques pour résoudre cette équation que J.B. Fourrier a inventé le développement en séries et la transformation qui portent son nom.

Application, résistance thermique

Soit un barreau homogène, une extrémité est à T_1 et l'autre à T_2.



En régime stationnaire $\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial J_U}{\partial x} = \sigma_U \Rightarrow \frac{\partial J_U}{\partial x} = 0$ $J_U(x) = Cst$

Donc : $J_U = -\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \Rightarrow T(x) = -\frac{J_U}{\lambda} x + Cst$ et : $T_1 - T_2 = \frac{J_U}{\lambda} l$

L'intensité thermique I_U (le flux de J_u à travers S) vérifie donc : $T_1 - T_2 = \frac{l}{\lambda S} I_U$

On appelle **résistance thermique** et **conductance thermique** les quantités R_U et G_U :

$$\boxed{R_U = \frac{l}{\lambda S} \qquad G_U = \frac{\lambda S}{l}}$$

Exercice à faire à la maison (facile) : montrer que les résistances et conductance thermiques en parallèle et en série se somment de la même manière que des résistances électriques. Attention : dans la physique du bâtiment on appelle résistance thermique la quantité l/λ.

Application, température de contact, effusivité

Expérience quotidienne : certains matériaux à la même température paraissent plus chaud ou plus froid que d'autres lorsqu'on les touchent. Du métal froid ou chaud paraît plus froid ou plus chaud que du bois ou du verre à la même température.

Quelle est la **température de l'interface T_c** ? (la peau dans le cas du toucher). Elle dépend de :

- La capacité calorifique ρc_V, la température de contact sera d'autant plus proche de celle du matériau pour lequel il faut beaucoup de chaleur pour faire varier sa température.
- La conductivité thermique λ, la température de contact sera d'autant plus proche de celle du matériau qui conduit le mieux la chaleur à l'interface.

⇒ Cela ne peut pas être déterminé uniquement par la diffusivité thermique $a = \lambda/\rho c_V$

On définit une grandeur appelée **effusivité thermique**, E, qui caractérise la capacité d'un matériau à transmettre vite sa chaleur à un autre corps.

$$\boxed{E = \sqrt{\rho \lambda c_V} = \frac{\lambda}{\sqrt{a}}}$$

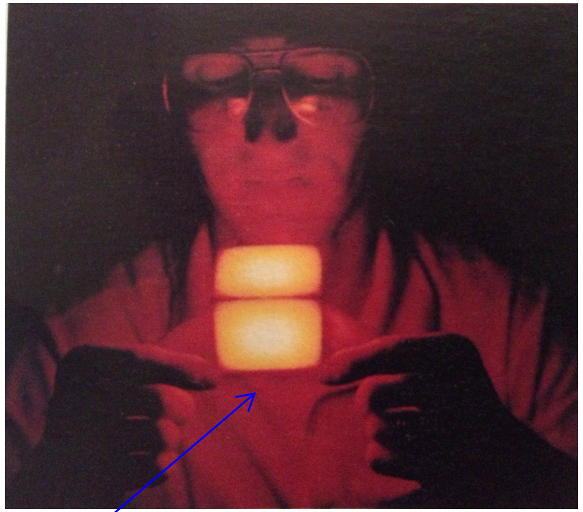
$J s^{-1/2} m^{-2} K^{-1}$ en SI

Application, température de contact, effusivité

Lorsque l'on met en contact deux matériaux à des températures T_1 et T_2, on montre que (exercice), la température de contact en régime stationnaire est la moyenne des températures, pondérée par l'effusivité des deux matériaux.

$$\boxed{T_c = \frac{E_1 T_1 + E_2 T_2}{E_1 + E_2}}$$

Corps	E (10^3 $Js^{-1/2}m^{-2}K^{-1}$)
Cuivre	36,5
Inox	8
Bois	0,34
Corps humain	1,6



Brique réfractaire de la navette spatiale, T = 2000 K, très faible capacité calorifique ρc_v et très faible conductivité thermique λ.

Application, température de contact, effusivité

Lorsque l'on met en contact deux matériaux à des températures T_1 et T_2, on montre que (exercice), la température de contact en régime stationnaire est la moyenne des températures, pondérée par l'effusivité des deux matériaux.

www.youtube.com/watch?v=Pp9Yax8UNoM

L'essentiel du cours 13

1 Transport ⇒ Système hors équilibre thermodynamique ⇒ phénomène irréversible.

2
- Diffusion
- Conduction
- Convection
- Rayonnement

3 Vecteur densité de courant et équation de continuité

$$\boxed{\frac{\partial \rho_\Pi}{\partial t} + \frac{\partial J_\Pi}{\partial x} = \sigma_\Pi}$$

4 Loi de Fick

$$\boxed{J_n(x,t) = -D\frac{\partial \rho_n(x,t)}{\partial x}}$$

L'essentiel du cours 13

5 Diffusion $\boxed{L \propto \sqrt{D\tau}}$

6 Loi de Fourrier $\boxed{J_U(x,t) = -\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x}}$

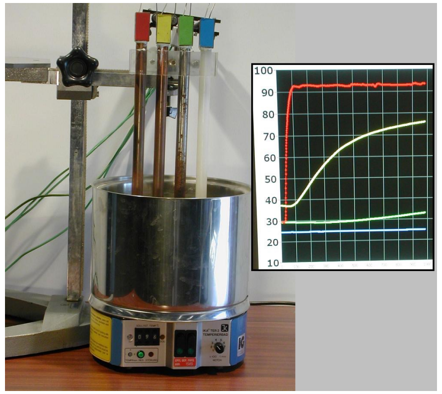
7 Equations de la diffusion et de la conduction de la chaleur

$$\boxed{\frac{\partial \rho_n}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \rho_n}{\partial x^2} + \sigma_n} \qquad \boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c_v}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\sigma_U}{\rho c_v}}$$

8 Notions de résistance thermique et effusivité thermique

Expériences de cours

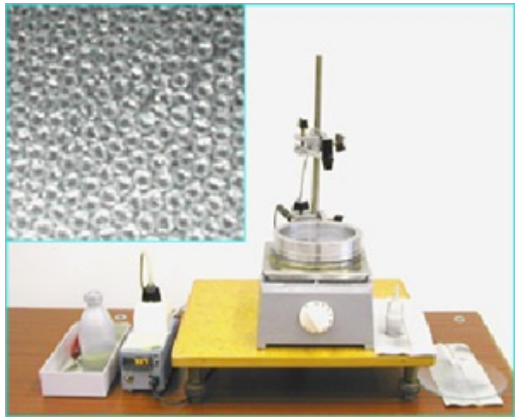
Expériences auditoires EPFL : auditoires-physique.epfl.ch
Chaine YouTube : www.youtube.com/channel/UC4htKGfCRRkFyIqAo8DGocg

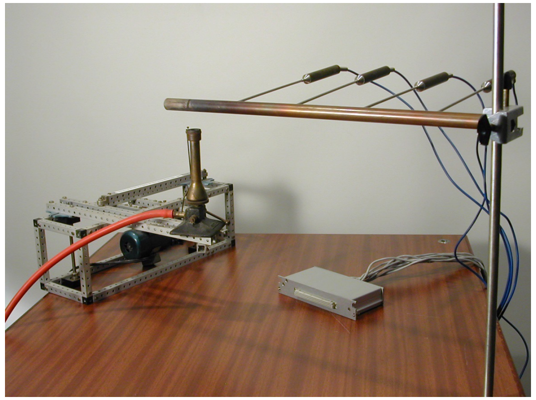


Conduction thermique


Effet de serre


Effet Dewar


Cellules de Bénard


Onde de chaleur